

**Exercice n°1**

Calculez les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| a) $f(t) = e^{-at}$   | h) $f(t) = e^{-0.5t}u(t-2)$                                     |
| b) $f(t) = \cos(\omega t)$  | i) $f(t) = \frac{t^2}{2}$                                       |
| c) $f(t) = t^n \quad n \geq 1$  | j) $f(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{4})$                            |
| d) $f(t) = t^5 e^{2t}$  | k) $f(t) = e^{-0.5t} \sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)$ |
| e) $f(t) = 3(1 - e^{-4t})$  | l) $f(t) = t.e^{-at}.\delta(t-1)$                               |
| f) $f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$              | m) $f(t) = t.u(t-2) + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)$      |
| g) $f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ |   |
- avec :  $u(t)$  : échelon unitaire  
 $\delta(t)$  : impulsion de Dirac

**Exercice n°2**

Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| a) $F(p) = \frac{2}{p(p+1)(p-2)}$      | d) $F(p) = \frac{5p+16}{(p+2)^2(p+5)}$   |
| b) $F(p) = \frac{p(p+2)}{p^2+2p+2}$    | e) $F(p) = \frac{2(p+2)}{p^2-2p+2}$      |
| c) $F(p) = \frac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}$ | f) $F(p) = \frac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)}$ |

**Exercice n°3**

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace :

- |   |   |
|---|---|
| a) $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = \sin(t)$                                    | avec $y(0) = 1; \dot{y}(0) = 2$                   |
| b) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4$                                 | avec $y(0) = -2; \dot{y}(0) = 0$                  |
| c) $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} = 0$ | avec $y(0) = 3; \dot{y}(0) = -2; \ddot{y}(0) = 7$ |

**Exercice n°4**

En utilisant les théorèmes des valeurs initiale et finale, calculez  $s(t \rightarrow 0^+)$  et  $s(t \rightarrow \infty)$  pour les fonctions suivantes :

- |  |
|--|
| a) $S(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p}$ |
| b) $S(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}$ |

**Exercice n°1**

Calcul des transformées de Laplace directes :

1.a)  $f(t) = e^{-at}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \left[ \frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p+a}$$

1.b)  $f(t) = \cos(\omega t)$

sachant que :  $\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

1<sup>ère</sup> méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2} [\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right] \quad \text{car : } \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

2<sup>ème</sup> méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-j\omega t} dt \right] = \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(p-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(p+j\omega)t} dt \right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right] \quad \text{car : } \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

1.c)  $f(t) = t^n \quad n \geq 1$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

Avec :  $u = t^n \quad dv = e^{-pt} dt$

$$du = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{t^n\} = \underbrace{-\frac{1}{p} \left[ t^n e^{-pt} \right]_0^\infty}_{\substack{\text{Tend vers 0, lorsque } t \rightarrow \infty \\ (e^{-pt} \text{ tend plus vite vers 0} \\ \text{que ne tend } t^n \text{ vers } \infty). \\ \text{Tend vers 0, lorsque } t \rightarrow 0}} + \frac{n}{p} \int_0^\infty e^{-pt} t^{n-1} dt = \frac{n}{p} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{p} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p} \mathcal{L}\{t^{n-2}\} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p} \frac{n-2}{p} \mathcal{L}\{t^{n-3}\} = \dots$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{p} \frac{n-1}{p} \frac{n-2}{p} \dots \frac{n-(n-1)}{p} \mathcal{L}\{t^{n-n}\} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{p^n} \mathcal{L}\{1\}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^n} \frac{1}{p} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p} \quad u(t) : \text{échelon unitaire}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

1.d)

$$f(t) = t^5 e^{2t}$$

sachant que :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(p+a)$$

et :

$$\mathcal{L}\{t^5\} = \frac{5!}{p^6} \quad (\text{voir exercice 1.c})$$

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5!}{(p-2)^6}$$

1.e)

$$f(t) = 3(1 - e^{-4t})$$

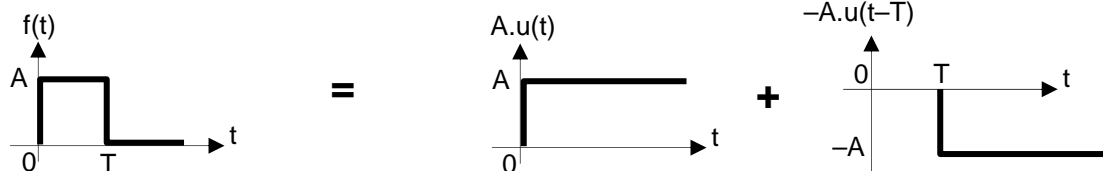
$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = 3 [\mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{e^{-4t}\}] = 3 \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+4} \right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{12}{p(p+4)}$$

1.f)

$$f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$f(t)$  est, en fait, la somme algébrique de 2 échelons unitaires : le premier partant de  $t=0$ , le second partant de  $t=T$ , mais de signe négatif.



$$\Rightarrow f(t) = A[u(t) - u(t-T)]$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = A[\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\}]$$

$$\Rightarrow F(p) = A \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-Tp} \right] \quad \text{car : } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p) \quad (\text{pour } t \geq T)$$

$$\Rightarrow F(p) = A \frac{1 - e^{-Tp}}{p}$$

1.g) 
$$f(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit : 
$$g(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \Rightarrow f(t) = e^{-\alpha t} \cdot g(t)$$

Or : 
$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(p) = A \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (\text{voir exercice 1.f})$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-\alpha t} \cdot g(t)\} = G(p + \alpha)$$

$$\Rightarrow F(p) = A \frac{1 - e^{-T(p+\alpha)}}{p + \alpha}$$

1.h) 
$$f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\} = \frac{e^{-2p}}{p}$$

car :  $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p) \quad (\text{pour } t \geq T)$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-2(p+0.5)}}{p + 0.5}$$

car :  $\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(p+a)$

1.i) 
$$f(t) = \frac{t^2}{2}$$

1<sup>ère</sup> méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{2!}{p^{2+1}} \right] = \frac{1}{p^3} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (\text{voir exercice 1.c})$$

2<sup>ème</sup> méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{t^2}{2} dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :  $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec :  $u = \frac{t^2}{2} \quad dv = e^{-pt} dt$

$$du = t \cdot dt \quad v = \frac{e^{-pt}}{-p}$$

$$\Rightarrow F(p) = -\frac{1}{2p} \left[ t^2 e^{-pt} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} t e^{-pt} dt$$

Tend vers 0, lorsque  $t \rightarrow \infty$   
 $(e^{-pt} \text{ tend plus vite vers } 0$   
 $\text{que ne tend } t^2 \text{ vers } \infty).$   
 Tend vers 0, lorsque  $t \rightarrow 0$

En intégrant, de nouveau, par partie, on aura :

$$(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$$

Avec :  $u = t$   $dv = e^{-pt} dt$   
 $du = dt$   $v = \frac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p} \left[ \underbrace{-\frac{1}{p} [te^{-pt}]_0^\infty}_{\substack{\text{Tend vers 0, lorsque } t \rightarrow \infty \\ (e^{-pt} \text{ tend plus vite vers 0} \\ \text{que ne tend } t \text{ vers } \infty). \\ \text{Tend vers 0, lorsque } t \rightarrow 0}} + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} dt \right] = \frac{1}{p^2} \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p^3} [-e^{-pt}]_0^\infty = \frac{1}{p^3}$$

1.j)

$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Rappel :

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \frac{1}{2j} [e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}] \\ \cos(\omega t) = \frac{1}{2} [e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}] \end{cases}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \frac{1}{p - j\omega} \\ \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{p + j\omega} \end{cases} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p + a}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right] \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$f(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) = \sin(2t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(2t) + \cos(2t)]$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{L}\{\sin(2t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2}{p^2 + 4} + \frac{p}{p^2 + 4} \right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p + 2}{p^2 + 4}$$

1.k)

$$f(t) = e^{-0.5t} \sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{On a : } \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-0.5t} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(p + 0.5)^2 + \omega^2} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(p+a)$$

$$\text{Et : } \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t + \varphi)\} = \cos(\varphi) \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} - \sin(\varphi) \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t + \varphi)\} = \cos(\varphi) \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \sin(\varphi) \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$$

$$\text{Donc : } F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\omega}{(p + 0.5)^2 + \omega^2} + \frac{p \cdot \cos(\varphi) - \omega \cdot \sin(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$$

1.l)

$$f(t) = t \cdot e^{-at} \cdot \delta(t-1)$$

 $\delta(t)$  : impulsion de Dirac

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\delta(t-1)\} = e^{-p \cdot 1} \cdot 1 = e^{-p} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \delta(t-1)\} = e^{-(p+a)} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(p+a)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t \cdot e^{-at} \cdot \delta(t-1)\} = e^{-(p+a)} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{t \cdot g(t)\} = -\frac{d}{dp} [G(p)]$$

1.m)

$$f(t) = t \cdot u(t-2) + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}) \cdot u(t-3)$$

 $u(t)$  : échelon unitaire

$$\text{Soit : } f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{Avec : } f_1(t) = t \cdot u(t-2) \quad \text{et} \quad f_2(t) = \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}) \cdot u(t-3)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

$$\bullet \text{ Calculons en premier lieu : } \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{t \cdot u(t-2)\}$$

$$\triangleright \text{1}^{\text{ère}} \text{ méthode : } \text{ utilisation de la propriété } \mathcal{L}\{t \cdot g(t)\} = -\frac{d}{dp} [G(p)]$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\} = \frac{1}{p} e^{-2p}$$

$$\text{car : } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p)$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot u(t-2)\} = -\frac{(-2 \cdot e^{-2p}) \cdot p - 1 \cdot e^{-2p}}{p^2}$$

$$\text{car : } \mathcal{L}\{t \cdot g(t)\} = -\frac{d}{dp} [G(p)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t \cdot u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

$$\triangleright \text{2}^{\text{ème}} \text{ méthode : } \text{ utilisation de la propriété } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p)$$

$$\mathcal{L}\{t \cdot u(t-2)\} = \mathcal{L}\{(t-2+2) \cdot u(t-2)\}$$

$$= \mathcal{L}\{(t-2) \cdot u(t-2)\} + 2 \cdot \mathcal{L}\{u(t-2)\}$$

$$\text{Or : } \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{p} \Rightarrow \mathcal{L}\{u(t-2)\} = \frac{1}{p} e^{-2p} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p)$$

$$\text{Et : } \mathcal{L}\{t\} = \mathcal{L}\{t.u(t)\} = \frac{1}{p^2} \quad (\text{fonction rampe})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t-2\} = \mathcal{L}\{(t-2).u(t-2)\} = \frac{1}{p^2} e^{-2p}$$

$$\text{Donc : } \mathcal{L}\{t.u(t-2)\} = \frac{1}{p^2} e^{-2p} + 2 \frac{1}{p} e^{-2p}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

➤ 3<sup>ème</sup> méthode : utilisation de la définition de la transformée de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t.u(t-2)\} &= \int_0^{\infty} t.u(t-2).e^{-pt} dt \\ &= \underbrace{\int_0^2 t.u(t-2).e^{-pt} dt}_{=0, \text{ car } u(t-2)=0} + \underbrace{\int_2^{\infty} t.u(t-2).e^{-pt} dt}_{u(t-2)=1} = \int_2^{\infty} t.e^{-pt} dt \end{aligned}$$

En intégrant par partie, on aura :  $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

$$\begin{aligned} u &= t & dv &= e^{-pt} dt \\ du &= dt & v &= \frac{e^{-pt}}{-p} \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{t.u(t-2)\} = \underbrace{-\frac{1}{p} [te^{-pt}]_2^{\infty}}_{\text{Tend vers 0, lorsque } t \rightarrow \infty} + \frac{1}{p} \int_2^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p} \int_2^{\infty} e^{-pt} dt$$

$(e^{-pt} \text{ tend plus vite vers 0 que ne tend } t \text{ vers } \infty).$

$\text{Différent de 0, lorsque } t \rightarrow 2$

$$\mathcal{L}\{t.u(t-2)\} = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p^2} [-e^{-pt}]_2^{\infty} = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

- Calculons en second lieu :  $\mathcal{L}\{f_z(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)\}$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \left[ \sin(2\pi t). \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4}). \cos(2\pi t) \right].u(t)$$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\sin(2\pi t) - \cos(2\pi t)].u(t)$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\sin(\omega t).u(t)\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t).u(t)\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right).u(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \mathcal{L}\{\sin(2\pi t).u(t)\} - \mathcal{L}\{\cos(2\pi t).u(t)\} \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right).u(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{2\pi}{p^2 + 4\pi^2} - \frac{p}{p^2 + 4\pi^2} \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right).u(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right).u(t - 3)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2} e^{-3p} \quad \text{car : } \mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp} G(p)$$

• Finalement :  $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{(1 + 2p)e^{-2p}}{p^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2} e^{-3p}$$

$$\Rightarrow F(p) = e^{-2p} \left[ \frac{(1 + 2p)}{p^2} + \frac{e^{-p}}{\sqrt{2}} \frac{2\pi - p}{p^2 + 4\pi^2} \right]$$



**Exercice n°2**

Calcul des transformées inverses de Laplace :

2.a) 
$$F(p) = \frac{2}{p(p+1)(p-2)}$$

3 pôles réels (0 ; -1 ; 2)  $\Rightarrow F(p) = 2 \left[ \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p-2} \right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}(p+1)(p-2)} \right] = -\frac{1}{2} \\ B = \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \cancel{(p+1)} \cdot \frac{1}{p \cancel{(p+1)}(p-2)} \right] = \frac{1}{3} \\ C = \lim_{p \rightarrow 2} \left[ \cancel{(p-2)} \cdot \frac{1}{p(p+1) \cancel{(p-2)}} \right] = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = 2 \left[ \frac{-1/2}{p} + \frac{1/3}{p+1} + \frac{1/6}{p-2} \right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = 2 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{1}{6} e^{2t} \right] \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = -1 + \frac{1}{3} (2e^{-t} + e^{2t}) \quad t \geq 0$$

2.b) 
$$F(p) = \frac{p(p+2)}{p^2 + 2p + 2}$$

Degré du numérateur  $\geq$  Degré du dénominateur (n=m=2)  $\Rightarrow$  Avant le développement en fractions partielles, il faut réécrire  $F(p)$  en opérant une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

$$\frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p + 2} = \frac{p^2 + 2p + 2 - 2}{p^2 + 2p + 2} = 1 - 2 \frac{1}{\underbrace{p^2 + 2p + 2}_{F_1(p)}}$$

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p + 2} = \frac{p^2 + 2p + 2 - 2}{p^2 + 2p + 2} = 1 - 2 \frac{1}{\underbrace{p^2 + 2p + 2}_{F_1(p)}}$$

$$F(p) = 1 - 2.F_1(p) \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = \mathcal{L}^{-1} \{ 1 \} - 2. \mathcal{L}^{-1} \{ F_1(p) \}$$

$F_1(p)$  a 2 pôles complexes conjugués  $(-1 \pm j)$

$$\Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{(p+1+j)(p+1-j)} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

or  $\mathcal{L} \{ \sin(\omega t) \} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$  et  $\mathcal{L} \{ e^{-at} \sin(\omega t) \} = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

$$\Rightarrow f_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F_1(p) \} = e^{-t} \sin(t) \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = \delta(t) - 2e^{-t} \sin(t) \quad t \geq 0$$

2.c)

$$F(p) = \frac{2p^2 + 7p + 8}{p^2 + 3p + 2}$$

Degré du numérateur  $\geq$  Degré du dénominateur (n=m=2)  $\Rightarrow$  division euclidienne

$$2p^2 + 7p + 8 = 2(p^2 + 3p + 2) + (p + 4)$$

$$F(p) = 2 + \frac{p + 4}{p^2 + 3p + 2} = 2 + \frac{p + 4}{\underbrace{(p + 1)(p + 2)}_{F_1(p)}}$$

$$F_1(p) \text{ a 2 pôles réels } (-1 ; -2) \Rightarrow F_1(p) = \frac{A}{(p + 1)} + \frac{B}{(p + 2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \cancel{(p + 1)} \cdot \frac{(p + 4)}{\cancel{(p + 1)}(p + 2)} \right] = 3 \\ B = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \cancel{(p + 2)} \cdot \frac{(p + 4)}{(p + 1)\cancel{(p + 2)}} \right] = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = 2 + \frac{3}{(p + 1)} - \frac{2}{(p + 2)}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\} = 2\delta(t) + 3e^{-t} - 2e^{-2t} \quad t \geq 0$$

2.d)

$$F(p) = \frac{5p + 16}{(p + 2)^2 (p + 5)}$$

$$1 \text{ pôle double } (-2) \text{ et } 1 \text{ pôle réel } (-5) \Rightarrow F(p) = \frac{A}{(p + 2)^2} + \frac{B}{(p + 2)} + \frac{C}{(p + 5)}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \frac{1}{0!} \left[ \cancel{(p + 2)^2} \cdot \frac{5p + 16}{\cancel{(p + 2)^2} (p + 5)} \right] \right] = 2 \\ B = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \frac{1}{1!} \left[ \frac{d}{dp} \left( \cancel{(p + 2)^2} \cdot \frac{5p + 16}{\cancel{(p + 2)^2} (p + 5)} \right) \right] \right] = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \frac{d}{dp} \left( \frac{5p + 16}{(p + 5)} \right) \right] = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \frac{9}{(p + 5)^2} \right] = 1 \\ C = \lim_{p \rightarrow -5} \left[ \cancel{(p + 5)} \cdot \frac{5p + 16}{(p + 2)^2 \cancel{(p + 5)}} \right] = -1 \end{cases}$$

$$F(p) = 2 \frac{1}{(p + 2)^2} + \frac{1}{(p + 2)} - \frac{1}{(p + 5)}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(p + 2)^2} \right\} = te^{-2t} \quad \text{car : } \mathcal{L}^{-1} \{ G(p + a) \} = e^{-at} \cdot g(t)$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(p)\} = 2te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-5t} \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = (2t + 1)e^{-2t} - e^{-5t} \quad t \geq 0$$

2.e) 
$$F(p) = \frac{2(p+2)}{p^2 - 2p + 2}$$

$F(p)$  a 2 pôles complexes conjugués :  $(1 \pm j)$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{2(p+2)}{(p-1+j)(p-1-j)} = 2 \frac{p+2}{(p-1)^2 + 1^2} = 2 \left[ \frac{p-1}{(p-1)^2 + 1^2} + 3 \frac{1}{(p-1)^2 + 1^2} \right]$$

or 
$$\begin{cases} \mathcal{L} \left\{ e^{-at} \sin(\omega t) \right\} = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L} \left\{ e^{-at} \cos(\omega t) \right\} = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = 2 \left[ e^t \cos(t) + 3e^t \sin(t) \right] \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = 2e^t [\cos(t) + 3\sin(t)] \quad t \geq 0$$

2.f) 
$$F(p) = \frac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)}$$

1 pôle double (0) et 2 pôles réels  $(-1 ; -3)$   $\Rightarrow F(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p+1)} + \frac{D}{(p+3)}$

$$A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{0!} \left\{ \cancel{p^2} \cdot \frac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)} \right\} \right] = 10/3$$

$$B = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{dp} \left( \cancel{p^2} \cdot \frac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)} \right) \right\} \right] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ 5 \frac{(p+1)(p+3) - 2(p+2)^2}{\{(p+1)(p+3)\}^2} \right] = -25/9$$

$$C = \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \cancel{(p+1)} \cdot \frac{5(p+2)}{p^2 \cancel{(p+1)}(p+3)} \right] = 5/2$$

$$D = \lim_{p \rightarrow -3} \left[ \cancel{(p+3)} \cdot \frac{5(p+2)}{p^2 (p+1) \cancel{(p+3)}} \right] = 5/18$$

$$F(p) = \frac{10/3}{p^2} - \frac{25/9}{p} + \frac{5/2}{(p+1)} + \frac{5/18}{(p+3)}$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ F(p) \} = \frac{10}{3}t - \frac{25}{9}u(t) + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{-3t} \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{10}{3}t + \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{18}e^{-3t} - \frac{25}{9} \quad t \geq 0$$

**Exercice n°3**

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace :

3.a)  $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) = \sin(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1; \dot{y}(0) = 2$

$$\Rightarrow \underbrace{\{p^2.Y(p) - p - 2\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)\}} + 3. \underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}} = \underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{\mathcal{L}\{\sin(t)\}}$$

$$\Rightarrow Y(p).(p^2 + 3) = p + 2 + \frac{1}{p^2 + 1} \quad \Rightarrow Y(p) = \frac{p+2}{p^2+3} + \frac{1}{(p^2+3)(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p+2}{p^2+3} + \frac{1/2}{p^2+1} - \frac{1/2}{p^2+3} \quad \Rightarrow Y(p) = \frac{p+3/2}{p^2+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1}$$

Or :  $\frac{p+3/2}{p^2+3} = \frac{p}{p^2+3} + \frac{1}{2} \frac{3}{p^2+3}$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{p}{p^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{p^2+3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \sin(t)$$

3.b)  $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4 \quad \text{avec} \quad y(0) = -2; \dot{y}(0) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\{p^2.Y(p) + 2p - 0\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)\}} + 4. \underbrace{\{p.Y(p) + 2\}}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)=p.Y(p)-y(0)\}} + 20. \underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}\{y(t)\}} = 4 \underbrace{\frac{1}{p}}_{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

$$\Rightarrow Y(p).(p^2 + 4p + 20) = \frac{4}{p} - 2(p + 4) \quad \Rightarrow Y(p) = \frac{4}{p(p^2 + 4p + 20)} - \frac{2(p + 4)}{(p^2 + 4p + 20)}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{4}{\underbrace{p[(p+2)^2 + 4^2]}_{F(p)}} - \frac{2(p+2)}{[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{4}{[(p+2)^2 + 4^2]}$$

Réécrivons d'abord  $F(p)$  :

$$F(p) = \frac{4}{p[(p+2)^2 + 4^2]} = \frac{A}{p} + \frac{(Bp + C)}{[(p+2)^2 + 4^2]} \quad \begin{cases} 1 \text{ pôle réel : } (0) \\ 2 \text{ pôles complexes conjugués : } (-2 \pm 4j) \end{cases}$$

➤ 1<sup>ère</sup> méthode :

$$A(p^2 + 4p + 20) + Bp^2 + Cp = 4 \quad \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + C = 0 \\ 20A = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -1/5 \\ C = -4/5 \end{cases}$$

➤ 2<sup>ème</sup> méthode :

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \cancel{p} \cdot \frac{4}{\cancel{p}(p^2 + 4p + 20)} \right] = 1/5 \\ \lim_{p \rightarrow -2+4j} (Bp + C) = \lim_{p \rightarrow -2+4j} \left[ \cancel{(p^2 + 4p + 20)} \cdot \frac{4}{p \cancel{(p^2 + 4p + 20)}} \right] = \lim_{p \rightarrow -2+4j} \left[ \frac{4}{p} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B(-2 + 4j) + C = \frac{4}{-2 + 4j} = \frac{4(-2 - 4j)}{(-2 + 4j)(-2 - 4j)} = \frac{1}{5}(-2 - 4j) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ 5(-2B + C) = -2 \\ 5(4jB) = -4j \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -1/5 \\ C = -4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5[(p+2)^2 + 4^2]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{2(p+2)}{[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{4}{[(p+2)^2 + 4^2]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{10(p+2)}{5[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{20}{5[(p+2)^2 + 4^2]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{11(p+2)}{5[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{22}{5[(p+2)^2 + 4^2]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{11}{5} \frac{(p+2)}{[(p+2)^2 + 4^2]} - \frac{11}{10} \frac{4}{[(p+2)^2 + 4^2]}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} - \frac{11}{5} e^{-2t} \cos(4t) - \frac{11}{10} e^{-2t} \sin(4t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} - \left( \frac{11}{5} \cos(4t) + \frac{11}{10} \sin(4t) \right) e^{-2t}$$

$$3.c) \quad \boxed{\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 3; \dot{y}(0) = -2; \ddot{y}(0) = 7}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\{p^3.Y(p) - 3p^2 + 2p - 7\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}=p^3.Y(p)-p^2.y(0)-p.\dot{y}(0)-\ddot{y}(0)} + 5. \underbrace{\{p^2.Y(p) - 3p + 2\}}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)} + 6. \underbrace{\{p.Y(p) - 3\}}_{\mathcal{L}\{y(t)\}=p.Y(p)-y(0)} = 0$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{3p^2 + 13p + 15}{p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{3p^2 + 13p + 15}{p(p+2)(p+3)} \quad \{3 \text{ pôles réels : } (0; -2; -3)\}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+3)}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \cancel{p} \cdot \frac{3p^2 + 13p + 15}{\cancel{p}(p+2)(p+3)} \right] = \frac{5}{2} \\ B = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \cancel{(p+2)} \cdot \frac{3p^2 + 13p + 15}{p \cancel{(p+2)}(p+3)} \right] = -\frac{1}{2} \\ C = \lim_{p \rightarrow -3} \left[ \cancel{(p+3)} \cdot \frac{3p^2 + 13p + 15}{p(p+2) \cancel{(p+3)}} \right] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{5}{2} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{(p+2)} + \frac{1}{(p+3)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} + e^{-3t}$$

**Exercice n°4**

En utilisant les théorèmes des valeurs initiale et finale, calculez les valeurs du signal de sortie  $s(t \rightarrow 0^+)$  et  $s(t \rightarrow \infty)$  pour les fonctions suivantes :

4.a) 
$$S(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p}$$

➤ Calcul de  $s(0^+)$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 1$$

➤ Calcul de  $s(t \rightarrow \infty)$  :

Avant de calculer  $s(t \rightarrow \infty)$ , il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides :

$$p.S(p) = p \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = p \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p(p+1)(p+2)}$$

$p.S(p)$  a 3 pôles (0 ; -1 ; -2) placés dans le demi-plan gauche du plan complexe. Donc aucun pôle sur l'axe imaginaire (à l'exception du pôle à l'origine), et aucun pôle dans le demi-plan droit. Dans ce cas, on peut calculer  $s(t \rightarrow \infty)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 2$$

Pour vérifier les calculs, on peut déterminer  $s(t)$  à partir de  $S(p)$  en utilisant la transformée inverse de Laplace, puis calculer  $s(t \rightarrow 0^+)$  et  $s(t \rightarrow \infty)$  :

$$S(p) = \frac{p^2 + 2p + 4}{p(p+1)(p+2)}$$

$$S(p) \text{ a 3 pôles réels (0 ; -1 ; -2)} \Rightarrow S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ \cancel{p} \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{\cancel{p}(p+1)(p+2)} \right] = 2 \\ B = \lim_{p \rightarrow -1} \left[ \cancel{(p+1)} \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p \cancel{(p+1)}(p+2)} \right] = -3 \\ C = \lim_{p \rightarrow -2} \left[ \cancel{(p+2)} \cdot \frac{p^2 + 2p + 4}{p(p+1) \cancel{(p+2)}} \right] = 2 \end{cases} \Rightarrow S(p) = 2 \frac{1}{p} - 3 \frac{1}{p+1} + 2 \frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}\{S(p)\} = 2 - 3e^{-t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 2 \end{cases}$$

4.b) 
$$S(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}$$

➤ Calcul de  $s(0^+)$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = \infty$$

➤ Calcul de  $s(t \rightarrow \infty)$  :

Avant de calculer  $s(t \rightarrow \infty)$ , il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides

$$p.S(p) = p \cdot \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = p \cdot \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 4)} = p \cdot \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p(p + 2j)(p - 2j)}$$

Mis à part le pôle à l'origine (0),  $p.S(p)$  a également 2 pôles sur l'axe imaginaire ( $-2j$  ;  $+2j$ ). La condition de calcul de  $s(\infty)$  n'est pas satisfaite. Dans ce cas, on ne peut pas calculer  $s(t \rightarrow \infty)$ .

Pour vérifier les calculs, on peut déterminer  $s(t)$  à partir de  $S(p)$  en utilisant la transformée inverse de Laplace, puis essayer de calculer  $s(t \rightarrow 0^+)$  et  $s(t \rightarrow \infty)$  :

$$S(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = 1 + \frac{2p^2 + 2p + 8}{p(p^2 + 4)} = 1 + 2 \frac{p^2 + p + 4}{p(p + 2j)(p - 2j)}$$

$$S(p) = 1 + 2 \left[ \frac{A}{p} + \frac{(Bp + C)}{[(p + 2j)(p - 2j)]} \right] \quad \begin{cases} 1 \text{ pôle réel : } (0) \\ 2 \text{ pôles complexes conjugués : } (\pm 2j) \end{cases}$$

➤ 1<sup>ère</sup> méthode :

$$A(p^2 + 4) + Bp^2 + Cp = p^2 + p + 4 \quad \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ C = 1 \\ 4A = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

➤ 2<sup>ème</sup> méthode :

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim_{p \rightarrow 0} \left[ p \cdot \frac{p^2 + p + 4}{p(p^2 + 4)} \right] = 1 \\ \lim_{p \rightarrow 2j} (Bp + C) = \lim_{p \rightarrow 2j} \left[ \cancel{(p^2 + 4)} \cdot \frac{p^2 + p + 4}{p \cancel{(p^2 + 4)}} \right] = \frac{-4 + 2j + 4}{2j} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B(2j) + C = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow S(p) = 1 + 2 \left[ \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 + 4} \right] = 1 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2 + 4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1} \{S(p)\} = \delta(t) + 2 + \sin(2t) \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \infty + 2 + 0 = \infty \text{ (à cause de l'impulsion)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0 + 2 + ? = ? \text{ (à cause du sinus qui varie continuellement)} \end{cases}$$

# Table des Principales Transformées de Laplace et leurs propriétés

Table des Transformées de Laplace	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
$t$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

(n : entier positif)

Propriétés des Transformées de Laplace	
$f(t) \quad (t \geq 0)$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$f(t)$	$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} \cdot \frac{d^{(r-n-1)} f(0)}{dt^{(r-n-1)}}$
$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) \cdot dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k} \cdot F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f\left(\frac{t}{k}\right)$	$k \cdot F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau} \cdot F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
$t \cdot f(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>f(t)</math> fonction périodique de période <math>T</math>.</li> <li><math>f_1(t)</math> fonction définie sur la 1<sup>ère</sup> période de <math>f(t)</math>.</li> </ul> $F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$	
$f(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} \{pF(p)\} \quad f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \{pF(p)\}$ <p style="text-align: center;">Si les limites existent</p>	